$H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z$ [无外场驱动].

红 $H_0 = \frac{\hbar}{2}(\Delta\sigma_z + \Omega\sigma_x)$ [有外场驱动]

Rabi频率

$\Delta = \omega_0 - \omega$ [激发源频率与系统共振失谐]

$\sigma_x : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 外部激发所引起态间耦合/跃迁.

$\sigma_z : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 系统本身能级结构.

幺正变换：$U^\dagger U = UU^\dagger = I$

I：单位矩阵.

傅里叶积分：$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}dk$

$\Rightarrow$ 波函数作展开：$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)\, e^{i(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t)}dk$

不同波数分量传播 v 不同 $\Rightarrow$ 波包色散

$\hookrightarrow$ 波包扩展/变形

(波的表示)

$\Rightarrow y = A\sin(kx - \omega t)$ 波的传播速度：$v = \frac{\omega}{k}$.

波数 角频率.

$\boxed{☆\begin{cases} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \omega = \frac{2\pi}{T}\end{cases} \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}}$

波的叠加：

设：$y_1 = A\sin(k_1x - \omega_1 t)$

$y_2 = A\sin(k_2x - \omega_2 t)$.

$y_1 + y_2 = A[\sin(k_1x - \omega_1t) + \sin(k_2x - \omega_2t)]$

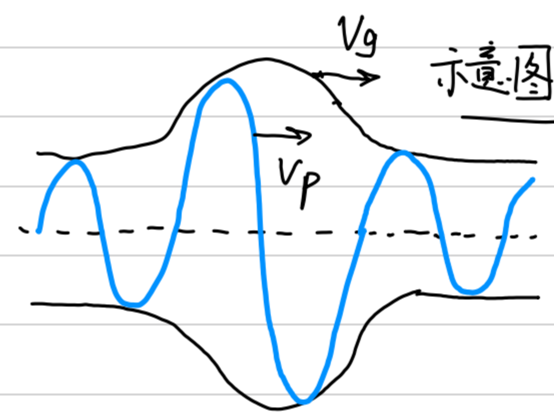
↓和差化积.

$2A\sin(k_{avg}x - \omega_{avg}t)\cos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t)$.

若 $k_{avg} > \frac{\Delta k}{2}$，则 sin 项作为波包内成份，cos 作为包络.

$\Rightarrow$ 相速度 $V_{phase} = \frac{\omega_{avg}}{k_{avg}}$ 高频成份速度.

群速度 $V_{group} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ 低频成份速度.



示意图

Mathematics Preparation

1. 内积 ($\langle\phi|\psi\rangle$) 复数

复数空间内积定义性质

A. 对右矢，线性性 $\langle\phi|a_1\psi_1 + a_2\psi_2\rangle = a_1\langle\phi|\psi_1\rangle + a_2\langle\phi|\psi_2\rangle$.

B. 对左矢，共轭线性性 $\langle b_1\phi_1 + b_2\phi_2|\psi\rangle = b_1^*\langle\phi_1|\psi\rangle + b_2^*\langle\phi_2|\psi\rangle$.

C. 共轭对称性 $\langle\phi|\psi\rangle = (\langle\psi|\phi\rangle)^*$.

↓证明(展开)

$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\phi_i^*\psi_i$.

$\langle\psi|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\psi_i^*\phi_i$

$(\langle\psi|\phi\rangle)^* = \sum_{i=1}^{n}(\psi_i^*\phi_i)^* = \sum_{i=1}^{n}\phi_i^*\psi_i = \langle\phi|\psi\rangle$.

厄米矩阵：$A^\dagger = A$

幺正矩阵：$A^\dagger = A^{-1}$.

Pauli矩阵：既是厄米的又是幺正的.

厄米算符物理意义.

$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ 特征值一定是实数.

可观测量必须算符是厄米的：

$\langle\psi|A|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\psi\rangle = \lambda$.

如果 $\langle\psi|\psi\rangle$ 经过归一化.

$Tr(\rho)$：ρ 矩阵的迹

对角线的值的求和.

若 ρ 是量子态密度矩阵，$Tr(\rho) = 1$.

BCH公式 **Baker-Campbell-Hausdorff**

① 若A,B对易, $[A,B]=0 \Rightarrow e^{A}Be^{-A}=B$.

② 若A,B不对易, $e^{A}Be^{-A} = B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \cdots\cdots$

① 若 $[A,B]=AB-BA=0$.

假设对 $A^kB-BA^k=0$ 也成立.

$$A^{k+1}B = A^kAB = A^kBA = BA^kA = BA^{k+1}.$$

由归纳法, $[A^kB,\ BA^k]=0$.

$\underbrace{e^{A}Be^{-A}}$ {将e^A展开}

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\ ;\quad e^{-A}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-A)^m}{m!}$$

$$\begin{aligned} e^{A}Be^{-A} &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\Big)B\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-A)^m}{m!}\Big) \\ &= B\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-A)^m}{m!}\Big) \\ &= Be^{A}e^{-A} = B. \end{aligned}$$

② 若 $[A,B]\neq 0$.

构造函数 $f(t)=e^{tA}Be^{-tA}$; $f(1)=e^{A}Be^{-A}$.

将$f(t)$作泰勒展开{针对于$f(0)=B$展开}.

$f(t)=f(0)+f'(0)t+\frac{t^2}{2!}f''(0)+\frac{t^3}{3!}f'''(0)+\cdots$

有一个好处是 $f(t=1)$ 时, t 项不参与运算.

$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2!}f''(0)+\frac{1}{3!}f'''(0)+\cdots$

$$\begin{aligned} f'(t) &= Ae^{tA}Be^{-tA}+e^{tA}[B(-A)e^{-tA}] \\ &= \underbrace{A}e^{tA}Be^{-tA}+e^{tA}(-BA)e^{-tA} \end{aligned}$$

//(算符与自己的函数是对易的)

$$\begin{aligned} &= e^{tA}(AB)e^{-tA}+e^{tA}(-BA)e^{-tA} \\ &= e^{tA}(AB-BA)e^{-tA} = e^{tA}[A,B]e^{-tA}. \end{aligned}$$

$f'(0)=[A,B]$

$\therefore e^{A}Be^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]$.

$$H_0=\frac{\hbar}{2}\omega_q\sigma_z+\underbrace{\hbar\omega_r(a^{+}a+\tfrac{1}{2})}_{\text{lamb shift (可省)}}+\underbrace{\hbar g(a^{+}\sigma^{-}+a\sigma^{+})}_{\text{耦合项}}$$

a^{+}, a : 光子吸收、发出升降算符

σ^{+}, σ^{-} : qubit能级升降算符 ($|0\rangle$、$|1\rangle$转).

ω_q, ω_r : qubit、谐振腔频率.

g : 耦合强度.

$\because g \ll |\omega_q-\omega_r| = |\Delta|$ $\therefore$ 耦合非强耦合(共振等).

$\therefore$ 可作二阶微扰处理来消除激发交换项.

$\underbrace{H'=e^{S}He^{-S}}_{\text{幺正变换}}$

对算符做幺正变换相当于更改观测角度.

$$H'=e^{S}He^{-S}\approx H+[S,H]+\frac{1}{2}[S,[S,H]]+\cdots$$

取 $S=\frac{g}{\Delta}(a^{+}\sigma^{-}-a\sigma^{+})$

代入计算并忽略二阶以上

$\Rightarrow H_{eff}=\frac{\hbar}{2}\underbrace{\omega_q\sigma_z}+\hbar(\omega_r+\frac{g^2}{\Delta}\sigma_z)(a^{+}a+\frac{1}{2})$ {schuster}

$(\omega_q+\frac{g^2}{\Delta}) \rightarrow$ {Quantum Machine}

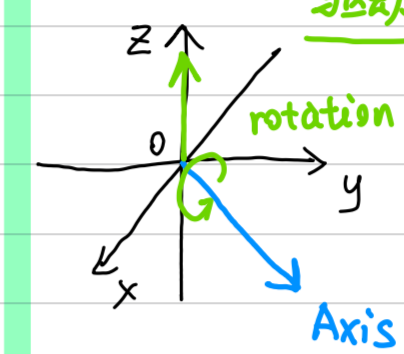
Quantum Machine.

$$H=H_0+\hbar s(t)\sigma_x+\sqrt{\frac{m(t)}{2}}\,(a^{+}e^{-i\omega t}+ae^{i\omega t})$$

量子位 + 谐振器 驱动项

示意图

驱动: $s(t)=A\cos(\omega_q t+\phi)$



余子式

假设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

则 a_{ij} 余子式为: 行列式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow C_{ij}$$

余子矩阵 → 转置 → 伴随矩阵 adj(A)

$$\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{转置}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & & C_{nn} \end{bmatrix}$$

逆矩阵 $A^{-1}=\dfrac{adj(A)}{\det(A)}=\dfrac{adj(A)}{|A|}$

$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$; $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

Bra-ket Notation

左矢 右矢（右矢是列向量，是左矢的共轭转置）

量子门

① identity gate

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

② Pauli gates (X, Y, Z). + {非π角度任意门}

$X = \sigma_x = NOT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$Y = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

$Z = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} I^2 = X^2 = Y^2 = Z^2 = -iXYZ = I \\ ZX = iY = -XZ. \end{cases}$

③ additional gates

// Hadamard（沿X-Z平面45°轴旋转），

$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

// Phase (S门)

$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \sqrt{Z}$

// T门

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = \sqrt{S} = \sqrt[4]{Z}$

// CNOT

$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$|00\rangle \to |00\rangle$

$|01\rangle \to |01\rangle$

$|10\rangle \to |11\rangle$

$|11\rangle \to |10\rangle$.

Control / NOT

// SWAP门

$SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Quantum State Tomography（量子态层析）

重构一个未知量子态.（间接还原密度矩阵）.

EXAMPLE:

假设 $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$.

其密度矩阵 ρ 定义为：

$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \to \begin{bmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$

对角线是态的概率. $|0\rangle \to P_{00}$; $|1\rangle \to P_{11}$.

P_{01}/P_{10}：不同基矢之间相干性（干涉项）

$\rho = \frac{1}{2}(I + \langle\sigma_x\rangle\sigma_x + \langle\sigma_y\rangle\sigma_y + \langle\sigma_z\rangle\sigma_z)$

只要知道3个Pauli算符期望即可重构 ρ.

Hadamard门	S门
$HXH^\dagger = Z$	$SXS^\dagger = Y$
$HZH^\dagger = X$	$SYS^\dagger = -X$
$HYH^\dagger = -Y$	$SZS^\dagger = Z$

$X \otimes I$：张量积.

$X: \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$

$I: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$X \otimes I$:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

CNOT门（制造量子纠缠）

$CNOT(X \otimes I)CNOT^\dagger = X \otimes X$

$CNOT(I \otimes X)CNOT^\dagger = I \otimes X$

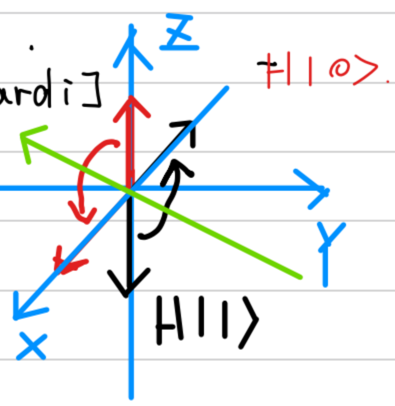
$CNOT(Z \otimes I)CNOT^\dagger = Z \otimes I$.

$CNOT(I \otimes Z)CNOT^\dagger = Z \otimes Z$.

$X \otimes Y$ 物理意义：对第1个qubit施加X，对第2个施加Y

Randomrized benchmarking

Hadamard门



X正半轴 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

X负半轴 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

Y正半轴 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$

Y负半轴 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$

Z正半轴 $|0\rangle$

Z负半轴 $|1\rangle$.

④ Clifford Gate

由H门、S门、CNOT门构成

variable[①] & parameter[②]

① 输入量/输出量

② 构造函数中的常量(不随输入变化)

Quantum Machine @ Rabi oscillations.

驱动信号 $s(t) = A\cos(\omega_a t + \phi)$

A是qubit在bloch sphere上面的rotate rate.

ϕ是qubit rotate 所依据的X-Y平面的轴的相位角.

更一般的，如果使用调制脉冲

$$s(t) = A(t)\cos(\omega_a t + \phi).$$

若 $A(t)$ 和 $\phi(t)$ 相对于 ω_a 来说频率较低，则上述描述依然成立.

对于 Rabi 振荡，$P_{|1\rangle}(\alpha) = \sin^2(\theta_a)$.

where the qubit: $\cos(\theta_a)|0\rangle + \sin(\theta_a)e^{i\phi}|1\rangle$.

however, the ϕ must be measured by Quantum State tomography.

混态与纯态，ρ：密度矩阵.

纯态：$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|0\rangle$. $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

混态：(掷硬币)有许多量子态叠加在一起，使用态密度矩阵 ρ 进行描述。

For 纯态： $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$; $\rho^2 = \rho$.

For 混态： $\rho = \sum_{k=1}^{n} P_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$.

$Tr(\rho^2)$ = purity ：纯态 purity 均为1.

// 最大混合态：$0.5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 处于 bloch 球原点！

证明：$\rho^2 = \rho$.
$$\rho^2 = (|\psi\rangle\langle\psi|)(|\psi\rangle\langle\psi|)$$
$$= (|\psi\rangle)(\langle\psi|\psi\rangle)(\langle\psi|)$$
$$= |\psi\rangle\langle\psi| = \rho.$$

Possiblity = $Tr(\rho M)$
M: operator
ρ：密度矩阵.

Resulting state
$\rho_i = \frac{M_i \rho M_i}{P_i} = |i\rangle$.

T_1: Energy Relaxation Time

量子比特从 $|1\rangle$ 自发地回到 $|0\rangle$ 所需的平均时间.

T_2: Dephasing Time

量子比特保持相干叠加态时间.(保持确定相位关系的时间).

QUA Basis

塞曼效应

几个名词：磁矩、轨道角动量、自旋角动量.

① $L = \vec{r} \times \vec{p}$ (磁矩 ⇒ 半径与角动量叉乘，类比力矩)

② 轨道角动量在量子力学中是波函数随角度变化而表现出旋转性. 在s轨道时，电子轨道角动量为0.
在p轨道时：轨道角动量为不为0.

③ 自旋角动量为内禀属性，所以H原子能级会发生分裂.

→ 看能量(从Hamilton量来分析).

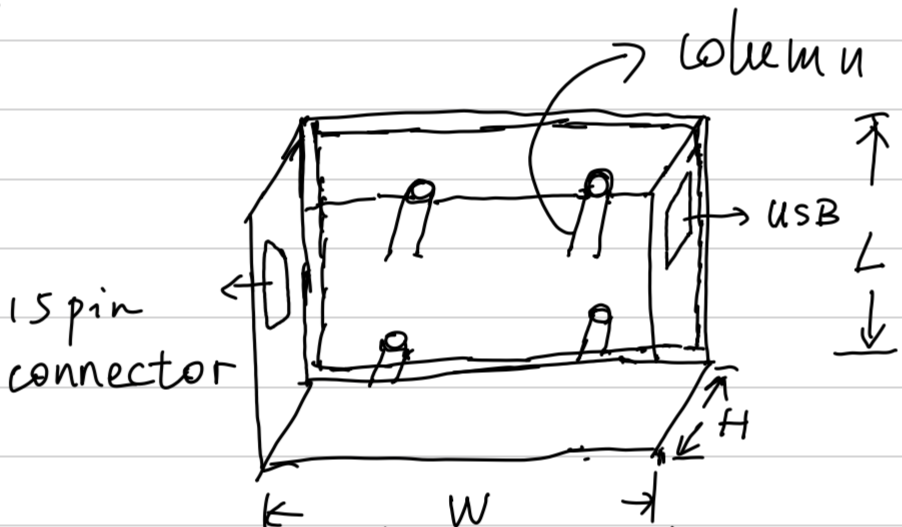
$H = -\mu B$. 磁矩

在磁场中具有磁矩的系统会有 $-\mu B$ 能量改变

CW-EPR & Pulsed EPR

EPR: Electron paramagnetic Resonase.

3-D Printed Box



	W	L	H
USB :			
15-pin connector:			
column :	Diameter :		

X – Y

Y – Z

X – Z